FIBONACCIN LUKUJONO

Italialainen Fibonacci oli kenties keskiajan merkittävin eurooppalainen matemaatikko. Hän eli vuosina 1170-1250. Fibonaccin oikea nimi oli Leonardo Pisano eli Leonardo Pisalainen.

Fibonacci sai koulutuksensa Pohjois-Afrikassa, missä hänen isänsä työpaikka oli. Fibonacci matkusteli paljon isänsä kanssa ja matkoillaan hän havaitsi monia kohdemaissa käytössä olevien matemaattisten järjestelmien tuomia etuja.

Fibonacci osoitti vuonna 1202 valmistuneessa kirjassaan Liber abaci, kuinka paljon helpompaa laskeminen oli arabialaisilla numeroilla roomalaisilla numeroilla laskemiseen verrattuna. Uusi laskutapa osoittautui ylivoimaiseksi ja arabialaiset numerot syrjäyttivät roomalaiset numerot lopullisesti 1500-luvulla.

Fibonaccin nimi yhdistetään yleensä hänen nimeään kantavaan lukujonoon eli Fibonaccin lukujonoon.

Tehtävä 1

Tässä tehtävässä pääset tutustumaan Fibonaccin kuuluisaan kaniongelmaan. Fibonacci pohti, kuinka nopeasti kanit lisääntyvät.

Oletetaan, että aluksi on yksi vastasyntynyt kanipari. Toinen kaneista on uros ja toinen on naaras. Jokainen kanipari tuottaa kahden kuukauden kuluttua syntymästään joka kuukausi yhden uuden kaniparin. Oletetaan, että yksikään kani ei kuole.

a) Täydennä kaniparien lukumäärät taulukkoon.

Kuukausi	Vastasynty-neet	Kuukauden ikäiset	Aikuiset	Kaikki
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

b) Kuinka monta kania on vuoden kuluttua?

c) Miten kaniparien lukumäärä tietyssä kuussa saadaan pääteltyä aiempien kuukasien kaniparien lukumäärien avulla?

d) Kuinka monta kaniparia on 13 kuukauden kuluttua alkutilanteesta?

e) Kaniparien lukumäärät muodostavat Fibonaccin lukujonon. Fibonaccin lukujonoon kuuluvia lukuja sanotaan Fibonaccin luvuiksi. Kirjoita Fibonaccin lukujonon kahdeksan ensimmäistä jäsentä eli Fibonaccin lukua.

Tehtävä 2

a) Merkintä $\mathbf{F_1}$ tarkoittaa Fibonaccin lukujonon ensimmäistä jäsentä, $\mathbf{F_2}$ toista jäsentä, jne. Täydennä alla olevaan taulukkoon sarakkeet $\mathbf{F_{n+1}}$ ja $\mathbf{F_n}$.

b) Laske peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamäärät oikeanpuolimmaiseen sarakkeeseen. Esitä osamäärät yhden desimaalin tarkkuudella.

n	F_{n+1}	F_n	$F_{n+1} : F_n$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

c) Mitä havaitset peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamääristä?

d) Selvitä, mikä on kultainen leikkaus ja miten se liittyy Fibonaccin lukuihin.

Tehtävä 3

a) Täydennä taulukkoon viisi ensimmäistä Fibonaccin lukua sarakkeeseen $\mathbf{F_n}$ ja niiden neliöt sarakkeeseen $\mathbf{F_n^2}$.

n	F_n	F_n^2	$F_n^2 + F_{n+1}^2$
1			
2			
3			
4			
5			

b) Laske peräkkäisten Fibonaccin lukujen neliöiden summat sarakkeeseen $\mathbf{F_n^2 + F_{n+1}^2}$.

c) Mitä havaitset peräkkäisten Fibonaccin lukujen neliöiden summista?

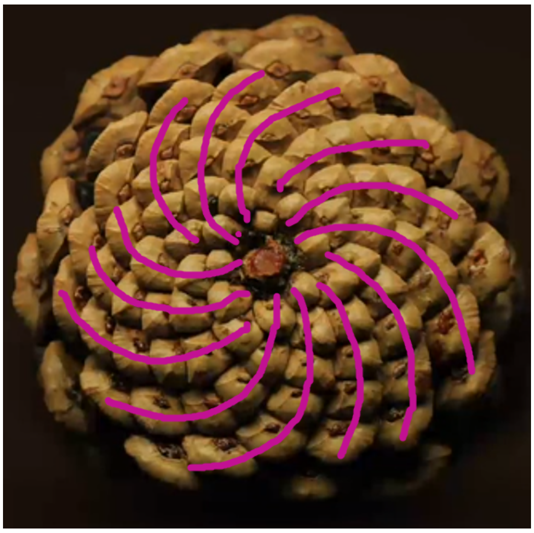
Tehtävä 4

a) Laske kukkien terälehtien lukumäärät.



b) Minkä mielenkiintoisen huomion voit tehdä a-kohdan kukkien terälehtien lukumääristä?

c) Laske männyn kävyssä myötä- ja vastapäivään kiertyvien kierteiden lukumäärät




c) Minkä havainnon voit tehdä männyn kävyn kierteiden lukumääristä?

Tehtävä 5

Fibonaccin lukuja voidaan käyttää muuntamaan kilometrit maileiksi ja päinvastoin.

Esimerkiksi jos matka on kahdeksan kilometriä, voidaan se muuntaa maileiksi etsimällä kahdeksaa edeltävä Fibonaccin luku. Kahdeksan kilometriä on siis noin viisi mailia.

Vastaavasti 13 mailia on noin 21 kilometriä, koska 21 on 13:ta seuraava Fibonaccin luku.

Jos matkan pituus ei löydy Fibonaccin lukujonosta, luku voidaan hajottaa Fibonacci-luvuiksi, muuntaa ja laskea muunnokset yhteen.

Esimerkiksi 50 mailia voidaan muuntaa kilometreiksi seuraavalla tavalla.

Esitetään luku 50 Fibonaccin lukujen avulla: 50 = 34 + 13 + 3.

Muunnetaan 34, 13 ja 3 erikseen kilometreiksi ottamalla niiden jälkeen seuraavat Fibonaccin luvut ja lasketaan ne yhteen: 55 + 21 + 5 = 81.

50 mailia on siis noin 81 kilometriä.

a) Muunna 21 kilometriä maileiksi.

b) Muunna 8 mailia kilometreiksi.

c) Muunna 100 mailia kilometreiksi.

d) Miksi muunnokset kilometreistä maileihin ja päinvastoin voidaan tehdä Fibonaccin lukujen avulla?

Vastaukset

1. a)

Kuukausi	Vastasynty-neet	Kuukauden ikäiset	Aikuiset	Kaikki
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5
6	3	2	3	8
7	5	3	5	13
8	8	5	8	21
9	13	8	13	34
10	21	13	21	55
11	34	21	34	89
12	55	34	55	144

b) 288 kania

c) Tietyn kuukauden kaniparien lukumäärä saadaan laskemalla kahden edeltävän kuukauden kaniparien lukumäärien summa.

d) 233 kaniparia

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

2. a) ja **b)**

n	F_{n+1}	F_n	$F_{n+1} : F_n$
1	1	1	1,0
2	2	1	2,0
3	3	2	1,5
4	5	3	1,7
5	8	5	1,6
6	13	8	1,6
7	21	13	1,6

c) Peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamäärä lähestyy lukua 1,6, kun n kasvaa.

d) Kultainen leikkaus saadaan, kun jaetaan jana kahteen osaan niin, että lyhyemmän osan suhde pidempään osaan on sama kuin pidemmän osan suhde koko janaan. Kultainen leikkaus on tällöin pidemmän ja lyhyemmän jako-osan pituuksien suhde eli noin 1,6 : 1.

Fibonaccin lukujonon kahden peräkkäisen luvun osamäärä on sitä lähempänä kultaista leikkausta, mitä pidemmälle lukujonossa edetään.

3. a) ja **b)**

n	F_n	F_n^2	$F_n^2 + F_{n+1}^2$
1	1	1	2
2	1	1	5
3	2	4	13
4	3	9	34
5	5	25	89

c) Peräkkäisten Fibonaccin lukujen neliöiden summat ovat myös Fibonaccin lukuja.

4. a) 5, 8 ja 21
b) Terälehtien lukumäärät ovat Fibonaccin lukuja.
c) 13 ja 8
d) Kierteiden lukumäärät ovat peräkkäiset Fibonaccin luvut.

5. a) noin 13 mailia **b)** noin 13 km **c)** noin 162 km
d) Peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhde on noin 1,6, kun edetään Fibonaccin lukujonossa pidemmälle. Fibonaccin luku on siis noin 1,6-kertainen edelliseen Fibonaccin lukuun verrattuna. Sattumalta myös yksi maili on noin 1,6 kilometriä. Mailit voidaan siis muuntaa kilometreiksi etsimällä seuraava Fibonaccin luku, koska näin saadaan noin 1,6-kertainen arvo, mikä halutaankin, kun muunnetaan mailit kilometreiksi.